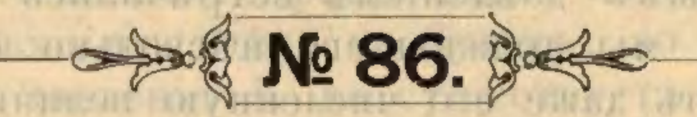
ВѢСТНИКЪ
ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



VIII Сем. 25 Января 1890 г. № 2.

О ГАЗООБРАЗНОМЪ И ЖИДКОМЪ
состояніи тѣлъ.

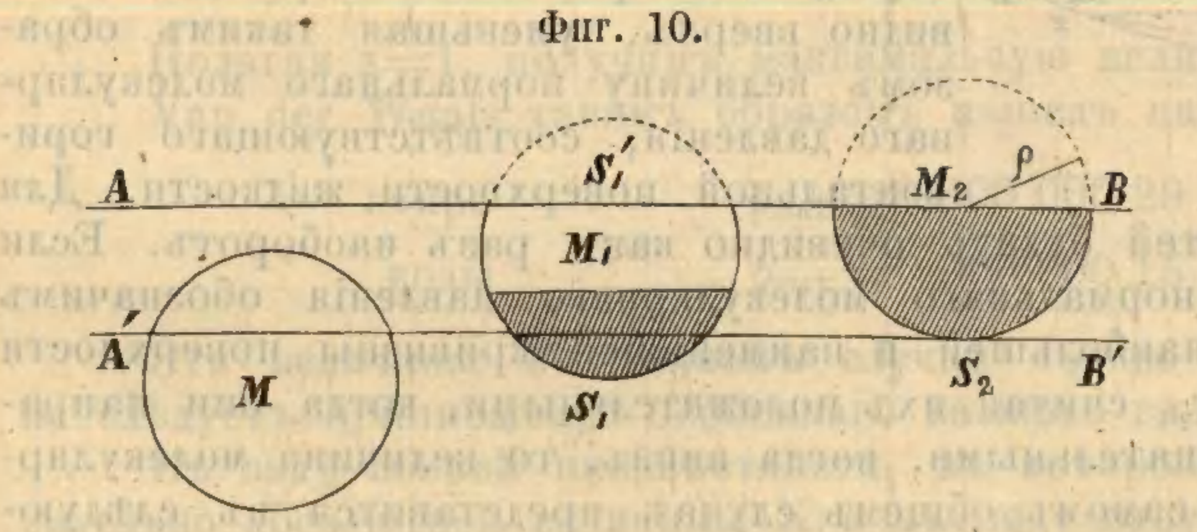
(*Продолженіе*) *).

VI.

Молекулярное давленіе и поверхностное натяженіе.

Представимъ себѣ свободную горизонтальную поверхность жидкости (фиг. 10) AB и плоскость A′B′, проведенную внутри жидкости въ удаленіи ρ отъ AB, гдѣ мы подъ ρ подразумѣваемъ такъ называемый радіусъ сферы дѣйствія молекулъ, т. е. то разстояніе, за которымъ взаимное притяженіе молекулъ становится уже болѣе нечувствительнымъ. Предположимъ для простоты, что плотность жидкости остается постоянной вплоть до самой ея поверхности и представимъ себѣ какую-нибудь молекулу въ трехъ различныхъ положеніяхъ: въ M, за плоскостью A′B′; въ M_1, между плоскостями A′B′ и AB и въ M_2 у самой поверхности жидкости. Если мы около каждой изъ этихъ трехъ точекъ опишемъ шаръ радіусомъ сферы молекулярнаго дѣйствія, то легко видѣть, что всѣ частицы, заключенныя между плоскостями AB и A′B′ будутъ испытывать притяженіе, направленное внутрь жидкой массы. Наибольшему дѣйствію подвергается молекула M_2, лежащая у самой поверхности жидкости, такъ какъ на нее дѣйствуютъ всѣ частицы, заключенныя въ заштрихованной полусферѣ S_2; для M_1 только частицы сегмента S_1, равнаго сегменту S′, выступающему изъ жидкости, дадутъ слагающую, направленную внутрь жидкости; что-же касается

Фиг. 10.



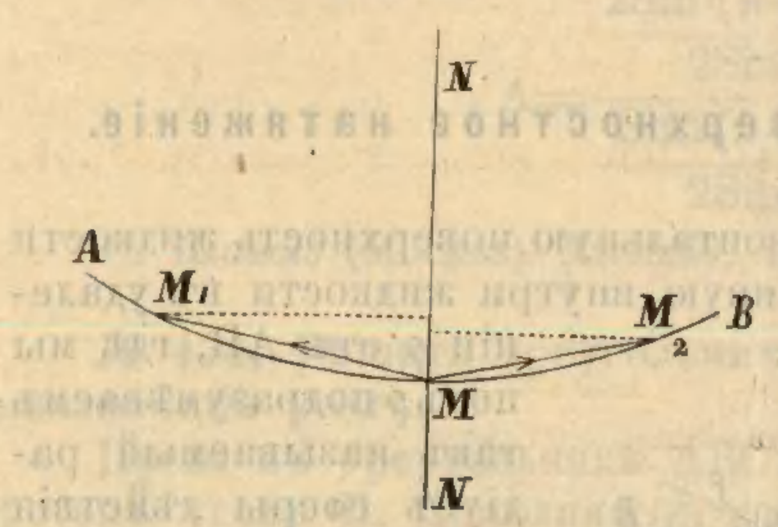
*) См. „Вѣстникъ" №№ 65, 67, 69, 71, 74, 76 и 80.

молекулы M, то она, какъ легко видѣть, притягивается во всѣ стороны совершенно одинаковымъ образомъ. Такимъ образомъ весь слой ABB'A' будетъ испытывать притяженіе, направленное внутрь жидкости, вслѣдствіе чего и сама жидкость будетъ подвержена со всѣхъ сторонъ нѣкоторому новому нормальному давленію, которое, беря свое начало во взаимодѣйствіи молекулъ, и носитъ названіе *молекулярнаго давленія.* Мы съ этимъ молекулярнымъ давленіемъ встрѣчались и раньше, въ предыдущихъ §§; здѣсь-же мы должны его нѣсколько ближе разсмотрѣть и постараться опредѣлить даже его численную величину.

Это молекулярное давленіе, какъ мы вскорѣ увидимъ, чрезвычайно велико, но тѣмъ не менѣе оно не поддается никакимъ непосредственнымъ измѣреніямъ, и только измѣненія его, которыя сами по себѣ и чрезвычайно ничтожны, могутъ дѣйствительно быть наблюдаемы, такъ какъ эти измѣненія даютъ начало различнымъ явленіямъ капилярности.

Дѣйствительно, представимъ себѣ вогнутую поверхность жидкости AB и какую-нибудь лежащую въ ней молекулу M. Другія молекулы, какъ напримѣръ M_1 и M_2 (фиг. 11), лежащія также у поверхности жидкости, проявятъ, если онѣ только не слишкомъ удалены отъ M, также свое притягательное дѣйствіе. Въ виду кривизны свободной поверхности жидкости это притяженіе дастъ нѣкоторую слагающую по нормали N, которая (слагающая) для вогнутыхъ поверхностей направлена очевидно вверхъ, уменьшая такимъ образомъ величину нормальнаго молекулярнаго давленія, соотвѣтствующаго горизонтальной поверхности жидкости. Для выпуклыхъ поверхностей будетъ очевидно какъ разъ наоборотъ. Если мы величину этого нормальнаго молекулярнаго давленія обозначимъ чрезъ K, а радіусы наибольшей и наименьшей кривизны поверхности жидкости чрезъ r_1 и r_2, считая ихъ положительными, когда они направлены вверхъ, а отрицательными, когда внизъ, то величина молекулярнаго давленія P_1 въ самомъ общемъ случаѣ представится въ слѣдующемъ видѣ:

Фиг. 11.



$$P_1 = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \qquad (1)$$

гдѣ $\frac{H}{2}$ называется поверхностнымъ натяженіемъ жидкости, которое, равно какъ и молекулярное давленіе K*), представляетъ для каждой жидкости нѣкоторую вполнѣ характеристичную величину, могущую до извѣстной степени служить мѣрою силы сцѣпленія частицъ. Поднятіе или опусканіе жидкости въ капилярныхъ трубкахъ, которыя обыкновенно при подобныхъ опытахъ находятся въ сообщеніи съ болѣе широкимъ сосудомъ, обусловливаются исключительно только *разностью* молекуляр-

*) K отнесено къ единицѣ поверхности.

ныхъ давленій P_1 у обѣихъ свободныхъ поверхностей жидкости. По этой то причинѣ нормальное молекулярное давленіе K всегда и исключается, и мы въ дѣйствительности наблюдаемъ только, вообще говоря, весьма малыя поднятія, зависящія исключительно отъ величины кривизны свободной поверхности жидкости.

Величину H мы можемъ съ большою легкостью опредѣлить. Для этого существуетъ очень много различныхъ способовъ, въ разборъ которыхъ мы конечно входить здѣсь не будемъ; но для опредѣленія величины молекулярнаго давленія K не существуетъ пока еще ни одного экспериментальнаго пріема, хотя знаніе величины K и было бы очень важно для теоріи жидкостей.

Дѣйствительно между H и K существуетъ слѣдующая очень интересная зависимость. Отношеніе $\frac{H}{K}$, какъ легко видѣть изъ формулы (1), должно представлять собою нѣкоторую длину; при этомъ оказывается, что эта длина есть ничто иное, какъ предѣльная (максимальная) возможная величина радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія ρ.

Вообще

$$H = \varepsilon . \rho K, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

гдѣ ε есть нѣкоторая правильная дробь, численная величина которой, правда, неизвѣстна, но во всякомъ случаѣ

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Полагая $\varepsilon = 1$, получимъ максимальную величину для ρ.

Van der Waals такимъ образомъ нашелъ напримѣръ для

эфира	$\rho_{max.} = 0{,}000\,000\,29$ миллим.
воды	$\rho_{max.} = 0{,}000\,000\,15$ „

Эти величины во всякомъ случаѣ только приближенныя и имъ не слѣдуетъ приписывать особеннаго важнаго значенія.

Въ виду полной неизвѣстности, въ которой мы находились относительно абсолютной величины K и въ виду отсутствія экспериментальныхъ методовъ для его опредѣленія, Van der Waals и сдѣлалъ попытку опредѣлить это молекулярное давленіе K на основаніи чисто теоретическихъ соображеній. Въ этомъ именно и заключалась первоначальная основная мысль его работы*).

Мы уже видѣли въ § II, что молекулярное давленіе встрѣчается также у тѣлъ и въ газообразномъ состояніи, и что это давленіе служитъ одною изъ причинъ неточности основныхъ законовъ газовъ. Тогда-же было указано, что это давленіе можно представить отношеніемъ

$$\frac{a}{v^2},$$

гдѣ a есть такъ называемое удѣльное притяженіе, а v объемъ тѣла.

---

*) Die Continuität etc. Vorrede.

Исходя теперь изъ соображенiй о непрерывности жидкаго и газообразнаго состоянiя тѣлъ, мы можемъ положить, конечно лишь только въ первомъ приближенiи, помня что въ примѣненiи уравненiя Van der Waals'а къ жидкимъ тѣламъ нужно соблюдать большую осторожность, неизвѣстную величину молекулярнаго давленiя

$$K=\frac{a}{v^2}, \dots\dots\dots\dots (3)$$

гдѣ v представляетъ собою объемъ жидкости.

Такимъ образомъ, зная a и объемъ тѣла въ жидкомъ состоянiи, можно опредѣлить и величину K.

Такъ, напримѣръ, для углекислоты $a=0{,}00874$. Въ наблюденiяхъ-же Andrews'а надъ сжимаемостью углекислоты, при самомъ наибольшемъ сгущенiи, когда уже трубка была наполнена жидкостью, v было равно почти $\frac{1}{500}$.

Это даетъ намъ

K=2185 атмосферамъ.

Этотъ результатъ конечно лишь только приближенный по причинѣ неточности самаго основного уравненiя Van der Waals'а при очень малыхъ объемахъ v; но тѣмъ не менѣе здѣсь ясно видимъ, съ величинами какого порядка мы имѣемъ дѣло, и какому громадному сжатiю жидкости, вообще говоря, подвержены. Не трудно поэтому представить себѣ, почему именно жидкости обладаютъ такою ничтожною сжимаемостью, такъ какъ дѣйствительно, что значитъ нѣсколько атмосферъ въ сравненiи съ такими громадными давленiями!

Съ возвышенiемъ температуры величина молекулярнаго давленiя K уменьшается, такъ что при критическомъ объемѣ, который представляетъ собою вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшiй изъ возможныхъ жидкихъ объемовъ, K для углекислоты равно только приблизительно 180 атмосф.

Посмотримъ-же теперь какая существуетъ зависимость между молекулярными давленiями различныхъ жидкостей. Мы здѣсь найдемъ законъ, аналогичный тѣмъ, которые мы имѣли раньше для расширенiя жидкостей и для насыщенныхъ паровъ.

Выразимъ опять объемъ жидкости v въ частяхъ критическаго объема v_1.

Пусть

$$v=\omega v_1.$$

Такъ какъ $v_1=3b$ *), то

$$K=\frac{a}{9\omega^2 b^2}$$

---

*) См. § III формулу (7).

Но такъ какъ $\frac{a}{27b^2}$ равно критическому давленію p_1 *), то мы будемъ имѣть:

$$K = \frac{3}{\omega^2} . p_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

То есть въ соотвѣтственныхъ состояніяхъ **) молекулярныя давленія различныхъ жидкостей прямо пропорціональны соотвѣтствующимъ критическимъ давленіямъ ***).

Приведемъ теперь нѣсколько чиселъ для различныхъ жидкостей, взятыхъ при условіяхъ, соотвѣтствующихъ состоянію эфира при 0°Ц. и при давленіи одной атмосферы.

Названіе жидкости.	K
Эфиръ ($C_4H_{10}O$)	1430 атм.
Хлористый этилъ (C_2H_5Cl)	2040 „
Алкоголь (C_2H_6O)	2400 „
Сѣроуглеродъ (CS_2)	2890 „
Сѣрнистый ангидридъ (SO_2).	3060 „
Вода (H_2O)	10700 „

Другая попытка опредѣлить величину молекулярнаго давленія K была сдѣлана Stefan'омъ ****).

Исходя изъ совершенно другихъ соображеній, чѣмъ Van der Waals и пользуясь извѣстными величинами теплоты испаренія жидкостей, Stefan также приходитъ къ чрезвычайно большимъ величинамъ молекулярнаго давленія K.

Чтобы уяснить себѣ принципъ его метода, представимъ себѣ какую-нибудь молекулу M и опишемъ около нея радіусомъ сферы молекулярнаго дѣйствія ρ шаръ. Проведемъ двѣ горизонтальныя плоскости AB и A'B' (фиг. 12) въ равномъ удаленіи x отъ частицы M и представимъ себѣ сначала, что плоскость AB представляетъ собою свободную поверхность жидкости. Притяженія, испытываемыя молекулою M

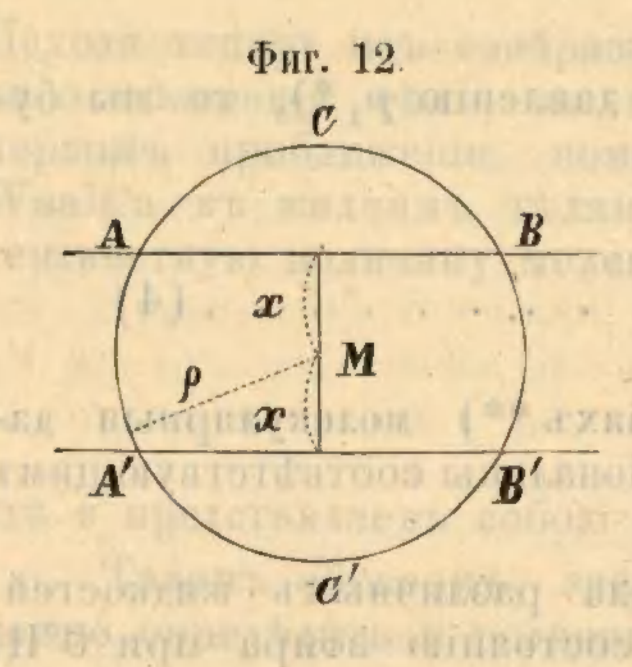
*) См. § III формулу (8).

**) То есть при равныхъ ω.

***) Правильнѣе было-бы сказать, что молекулярныя давленія составляютъ въ этомъ случаѣ ту-же часть соотвѣтствующихъ критическихъ молекулярныхъ давленій K_1, но это на самомъ дѣлѣ все равно, потому что между K_1 и p_1 существуетъ постоянное численное соотношеніе. Дѣйствительно $p_1 = \frac{a}{27b^2}$, а $K = \frac{a}{9b^2}$, слѣдовательно всегда $K_1 = 3p_1$.

****) Wien. Ber. 94. p. 4. 1886. II Abth.
Также Wied. Ann. 29. p. 655. 1886.

Фиг. 12



отъ различныхъ частицъ, заключенныхъ между плоскостями AB и A′B′, очевидно взаимно компенсируются, и на молекулу M, въ концѣ концовъ, дѣйствуютъ только частицы, заключенныя въ сегментѣ A′C′B′. Обозначимъ эту силу, дѣйствующую на частицу M нормально къ поверхности жидкости, чрезъ F_x. Очевидно, что

при $x=\rho$ $\qquad F_x=0$

а при $x=0$ $\qquad F_x$ достигаетъ своей максимальной величины *).

Предположимъ теперь, что плоскость A′B′ представляетъ собою свободную поверхность жидкости и что молекула M находится внѣ жидкости, но въ томъ-же удаленіи x отъ свободной поверхности послѣдней. Легко видѣть, что и въ этомъ случаѣ на частицу M дѣйствуетъ та-же самая сила F_x, обусловливаемая притяженіемъ молекулъ, заключенныхъ въ томъ-же самомъ сегментѣ A′C′B′. Итакъ по обѣ стороны свободной поверхности жидкости, въ равныхъ удаленіяхъ x отъ послѣдней, всякая молекула подвержена дѣйствію той-же самой вертикальной силы. Если $x \geqq \rho$, то F_x въ обоихъ случаяхъ будетъ равно 0, такъ какъ въ пространствѣ, заполненномъ паромъ, молекула M совершенно изъята изъ сферы вліянія жидкости; въ самой-же жидкости она, хотя и испытываетъ притяженіе отъ ближайшихъ къ ней частицъ, но это притяженіе, будучи совершенно равномѣрнымъ образомъ распредѣлено по всѣмъ возможнымъ направленіямъ въ пространствѣ, дастъ въ результатѣ составляющую также равную нулю.

Изъ этого разсужденія слѣдуетъ заключить, что работа, потребная для того, чтобы привести единицу массы жидкости изъ какой-нибудь точки, лежащей внутри жидкости, къ свободной поверхности послѣдней равна работѣ, потребной для того, чтобы вывести ту-же единицу массы отъ поверхности жидкости изъ сферы вліянія послѣдней. Эта послѣдняя работа, которую мы обозначимъ чрезъ A, есть ничто иное, какъ работа, соотвѣтствующая внутренней теплотѣ испаренія **), и мы ее можемъ слѣдовательно всегда съ большою легкостью опредѣлить; остается только найти зависимость между A и величиной молекулярнаго давленія K.

Для этого обратимся къ основнымъ принципамъ гидростатики.

Если Δp предоставляетъ собою разность давленій на единицу поверхности въ двухъ сосѣднихъ точкахъ (M) и $(M+\Delta M)$, находящихся внутри жидкости въ весьма маломъ удаленіи Δx одна отъ другой (и въ направленіи Δx), F_x силу, дѣйствующую на единицу массы въ направленіи Δx, а δ—плотность жидкости, т. е. массу единицы объема, то

---

*) Въ виду ничтожной плотности пара въ сравненіи съ плотностью жидкости, мы можемъ совершенно и не разсматривать притяженія парообразныхъ молекулъ, находящихся вблизи свободной поверхности жидкости.

**) Если мы примемъ, что испареніе происходитъ только отъ самой поверхности жидкости.

между всѣми этими величинами существуетъ слѣдующее основное соотношеніе

$$\triangle p = \delta . F_x . \triangle x \text{*)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Возьмемъ теперь двѣ точки: одну M_1, внутри жидкости, а другую M_2 у самой ея поверхности и прослѣдимъ измѣненіе p между этими двумя точками. Въ M_1 p равно молекулярному давленію K, а въ M_2 давленію одной атмосферы, т. е. 1. Слѣдовательно, принимая плотность жидкости постоянною, мы будемъ имѣть

$$\Sigma \triangle p = K - 1 = \delta \Sigma F_x \triangle x.$$

$\Sigma F_x . \triangle x$ есть ничто иное, какъ работа, потребная для того, чтобы перевести единицу массы изъ средины жидкости къ ея поверхности. т. е. равно, согласно съ предыдущимъ, A, т. е. равно работѣ, соотвѣтствующей внутренней теплотѣ испаренія. Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующее окончательное уравненіе

$$K - 1 = \delta . A, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

которое даетъ намъ возможность опредѣлить неизвѣстную величину K.

Въ видѣ примѣра мы сдѣлаемъ это вычисленіе для эфира.

Полная теплота испаренія эфира при 0° равна 94,0 малымъ калоріямъ; теплота, соотвѣтствующая внѣшней работѣ испаренія $\left(\frac{pu}{E}\right.$ см. формулу (4) въ предыдущемъ §), равна приблизительно 7,5 калор. **), слѣдовательно внутренняя теплота испаренія будетъ равна 86,5 калоріямъ.

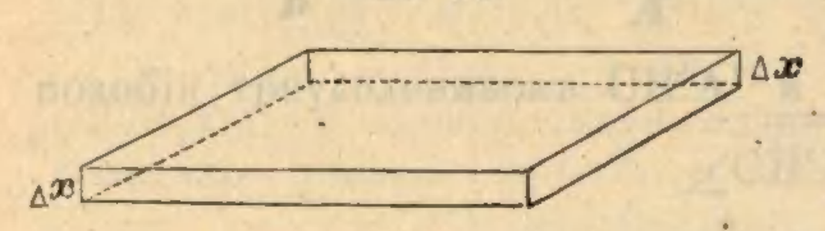
Это число относится къ единицѣ вѣса, а такъ какъ у насъ взята единица массы, то его надо еще умножить на ускореніе силы тяжести g. Это число надо еще перевести въ механическія единицы, т. е. выразить въ граммъ-центиметрахъ. Механическій эквивалентъ одной малой калоріи равенъ 42400 граммъ-центиметрамъ, слѣдовательно

$$A = 42400 . 86,5 . g.$$

Удѣльный вѣсъ эфира равенъ 0,73, слѣдовательно его плотность δ будетъ равна $\frac{0,73}{g}$.

*) Легко дать себѣ отчетъ въ справедливости этого выраженія. Представимъ себѣ жидкій прямоугольный параллелепипедъ, площадь основанія котораго равна 1, а высота равна $\triangle x$. Пусть F_x въ частномъ случаѣ представитъ собою силу тяжести; такъ какъ эта сила отнесена къ единицѣ массы, то F_x равно просто ускоренію силы тяжести g. Такимъ образомъ $\delta . g . \triangle x . 1$ представитъ собою ничто иное, какъ вѣсъ этого элементарнаго параллелепипеда, и легко видѣть, что разность давленій на верхнюю и нижнюю его площадь, т. е. $\triangle p$ будетъ именно равно вѣсу этого столба жидкости.

Фиг. 13.



**) См. Zeuner. Théorie méchanique de la chaleur. p. 576. Paris. 1869.

Отсюда

$$\delta . A = 0{,}73 . \frac{1}{g} . 42400 . 86 . 5 . g = 2677.100$$

Это число надо еще раздѣлить на 1033, чтобы получить результатъ, выраженный въ атмосферахъ *).

Итакъ окончательно

$$K - 1 = \frac{2677.100}{1033} = 2592 \text{ атм.}$$

или

$$K = 2593 \text{ атм.}$$

Мы видимъ такимъ образомъ что и этотъ въ высшей степени оригинальный путь приводитъ насъ также къ громаднымъ величинамъ молекулярнаго давленія K. Слѣдуетъ при этомъ однако замѣтить, что этотъ способъ опредѣленія K на самомъ дѣлѣ только приближенный. Stefan его впослѣдствіи нѣсколько измѣнилъ, принимая во вниманіе и измѣненіе плотности жидкости, но по всей вѣроятности получаемыя этимъ способомъ величины K на самомъ дѣлѣ слишкомъ велики **).

Дѣйствительно, мы при нашихъ разсужденіяхъ принимали, что испареніе происходитъ только отъ самой поверхности жидкости и къ тому-же неявнымъ образомъ допускали, что молекула въ парообразной части данной массы совершенно тождественна съ молекулой внутри жидкости. Но если только, какъ это нѣкоторыми и принимается, жидкая молекула представляетъ собою аггрегатъ газообразныхъ частицъ, то наши разсужденія не будутъ уже болѣе справедливыми и вычисленное нами A будетъ въ этомъ случаѣ слишкомъ велико и, чтобы получить болѣе вѣрную величину молекулярнаго давленія K, слѣдовало-бы вычесть изъ A работу, соотвѣтствующую физической диссоціаціи этихъ сложныхъ жидкихъ молекулъ.

Но если даже истинныя величины молекулярнаго давленія на самомъ дѣлѣ и нѣсколько меньше, то во всякомъ случаѣ это давленіе остается всегда чрезвычайно большимъ и обыкновенныя внѣшнія давленія, которымъ жидкости подвержены, будутъ въ сравненіи съ этимъ внутреннимъ давленіемъ совершенно уже ничтожны.

Б. Голицынъ (Страсбургъ).

(Окончаніе слѣдуетъ).

---

*) Дѣйствительно столбъ ртути въ 76 центиметровъ высоты и площадь основанія котораго равна 1-му квадратному центиметру вѣситъ 76. 1. 13,596=1033 гр.

**) Stefan также сдѣлалъ попытку опредѣлить K, исходя изъ извѣстныхъ величинъ коэффиціентовъ сжимаемости жидкостей.

ВЗАИМНЫЯ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

„Отвѣтъ на тему, предложенную въ Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ № 52, стр. 86.

(*Окончаніе*) *).

Разсмотримъ въ заключеніе нѣкоторые частные случаи.

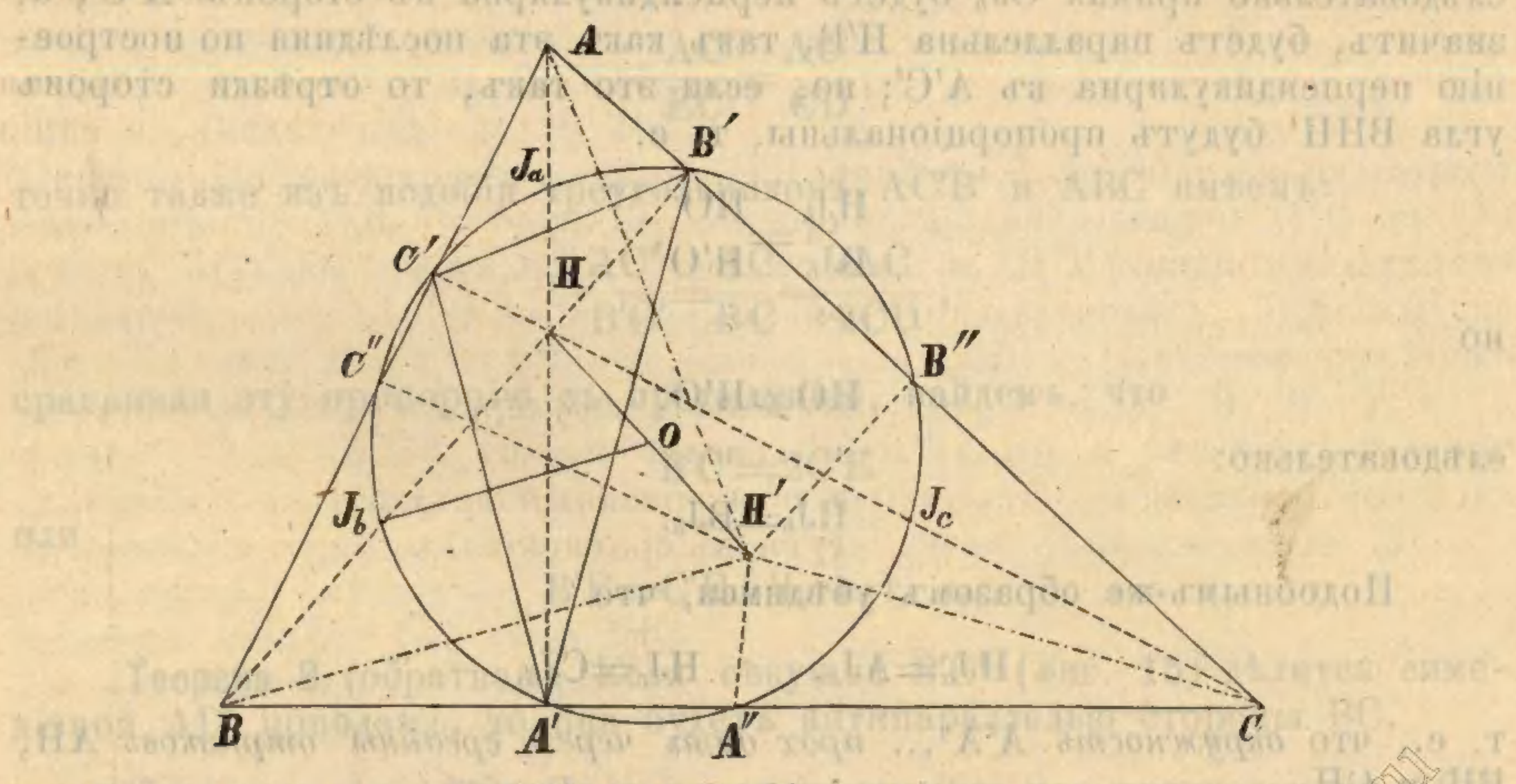
I. Если точка F взята на биссекторѣ какого-нибудь изъ угловъ треугольника, то изъ предыдущаго ясно, что и F′ придется на томъ же биссекторѣ; поэтому, если точка F совпадаетъ съ центромъ круга вписаннаго въ треугольникъ ABC (т. е. съ точкой пересѣченія биссекторовъ), то F′ совпадаетъ съ ней, т. е. *центръ вписаннаго круга есть точка сама себѣ взаимная.*

II. Если *точка* F *совпадаетъ съ ортоцентромъ* (т. е. съ точкой пересѣченія высотъ треугольника), *то ей взаимной будетъ центръ круга, описаннаго около даннаго треугольника.*

Чтобы убѣдиться въ этомъ стоитъ только доказать, что точки A″, B″, C″ суть средины сторонъ треугольника ABC.

Дѣйствительно, если H есть ортоцентръ (фиг. 14), H′-ему взаимная точка, построенная по первоначальному опредѣленію, тогда вслѣдствіе

Фиг. 14.



подобія треугольниковъ CH′A″ и CAC′, имѣемъ, что

$$\angle CH'A'' = \angle CAB;$$

точно также вслѣдствіе подобія треугольниковъ BH′A″ и AB′B, получимъ, что

$$\angle BH'A'' = \angle CAB,$$

*) См. „Вѣстникъ“ № 85.

а потому

$$\angle BH'A'' = \angle CH'A'',$$

но по построенію

$$H'A'' \perp BC,$$

слѣдовательно

$$\triangle BH'A'' = \triangle CH'A'',$$

и, значитъ,

$$BA'' = CA'',$$

т. е. точка A'' есть средина стороны BC.

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что точка B'' есть середина стороны AC, а точка C''—средина стороны AB. Итакъ окружность, проходящая черезъ A', B' и C', проходитъ черезъ средины сторонъ треугольника ABC; кромѣ того можно убѣдиться, что эта окружность дѣлитъ пополамъ отрѣзки высотъ AH, BH и CH; дѣйствительно, намъ извѣстно *), что высоты даннаго треугольника дѣлятъ пополамъ углы ортоцентрическаго, т. е. A'B'C'; поэтому

$$\smile C'J_b = \smile A'J_b,$$

слѣдовательно прямая OJ_b будетъ перпендикулярна къ сторонѣ A'C', а, значитъ, будетъ параллельна H'B, такъ какъ эта послѣдняя по построенію перпендикулярна къ A'C'; но, если это такъ, то отрѣзки сторонъ угла BHH' будутъ пропорціональны, т. е.

$$\frac{HJ_b}{BJ_b} = \frac{HO}{H'O},$$

но

$$HO = H'O,$$

слѣдовательно:

$$HJ_b = BJ_b.$$

Подобнымъ-же образомъ убѣдимся, что

$$HJ_a = AJ_a, \qquad HJ_c = CJ_c,$$

т. е., что *окружность* A'A''... *проходитъ черезъ средины отрѣзковъ* AH, BH и CH.

Итакъ эта окружность проходитъ черезъ *девять точекъ:* 3—подошвы высотъ, 3—средины сторонъ и 3—средины отрѣзковъ высотъ, слѣдовательно, это есть извѣстная *окружность 9-ти точекъ*.

III. Если точка F есть точка пересѣченія медіанъ треугольника **),

---

*) См. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат." т. I, стр. 53.

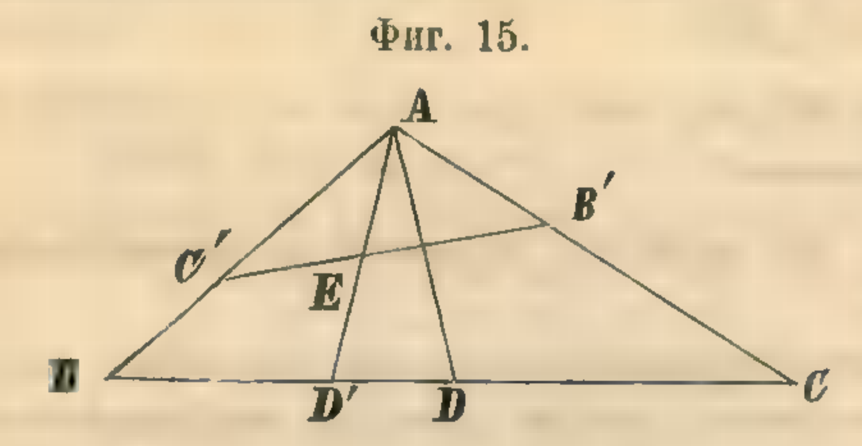
**) Точку пересѣченія медіанъ треугольника мы предложили-бы называть *медіацентромъ* треугольника.

то ей взаимная будетъ *точка Лемуаня,* названная такъ по имени французскаго геометра, впервые изслѣдовавшаго ея свойства.

Главнѣйшія свойства точки Лемуаня можно легко вывести, установивъ предварительно нѣкоторыя вспомогательныя теоремы, а именно:

Теорема 7. Симедіана*) стороны треугольника есть медіана ея антипараллели.

Фиг. 15.



Доказательство. Пусть AD (фиг. 15) медіана стороны BC треугольника ABC, и AD′—симедіана и пусть B′C′ антипараллель BC, т. е. такая прямая, что

$$\angle C' = \angle C,$$

и, слѣдовательно, также

$$\angle B' = \angle B;$$

требуется доказать, что AD′ дѣлитъ пополамъ B′C′, т. е. что

$$B'E = C'E.$$

Треугольники AC′E и ACD подобны, слѣдовательно:

$$\frac{AC'}{EC'} = \frac{AC}{CD};$$

точно также изъ подобія треугольниковъ AC′B′ и ABC имѣемъ:

$$\frac{AC'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{2CD},$$

сравнивая эту пропорцію съ предыдущей, найдемъ, что

$$B'C' = 2C'E$$

или

$$B'E = C'E. \text{ Ч. и т. д.}$$

Теорема 8 (обратная). Если сѣкущая B′C′ (фиг. 15) дѣлится симедіаной AD′ пополамъ, то она будетъ антипараллелью стороны BC.

*Доказательство***). По построенію видимъ, что треугольники AC′E и CAD суть половины треугольниковъ AB′C′ и ABC, да кромѣ того:

$$\frac{\triangle AB'C'}{\triangle ABC} = \frac{AB'.AC'}{AC.AB}, \quad \frac{\triangle AC'E}{\triangle CAD} = \frac{AE.AC'}{AD.AC}$$

---

*) *Симедіаной* называютъ равнонаклонную медіанѣ.

**) Эту теорему, какъ обратную, легко доказать по способу приведенія къ нелѣпости; но мы предпочитаемъ прямыя доказательства.

сравнивая эти выраженія, найдемъ:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AE}{AD};$$

отсюда заключаемъ, что треугольники AEB' и ABD подобны, слѣдовательно

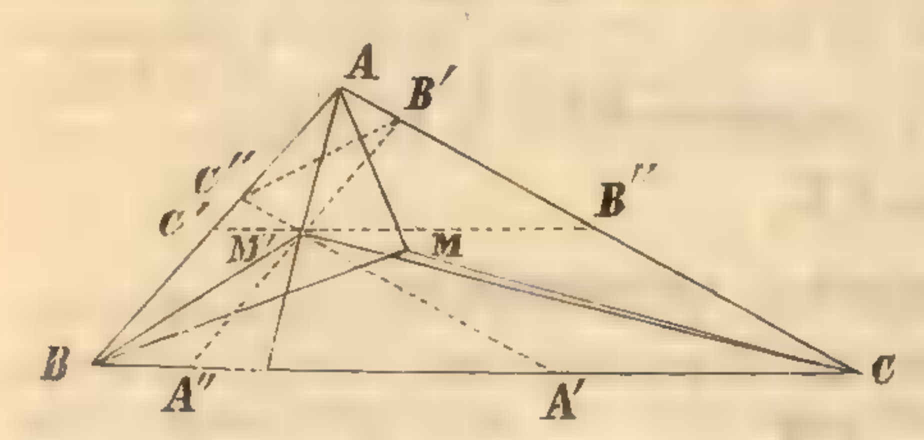
$$\angle B' = \angle B,$$

т. е. B'C' антипараллельна сторонѣ BC, ч. и т. д.

При помощи этихъ теоремъ мы можемъ установить главнѣйшія свойства точки Лемуаня.

1. *Если проведемъ черезъ точку Лемуаня прямыя параллельныя сторонамъ даннаго треугольника, то получимъ шесть точекъ, лежащихъ на одной окружности.*

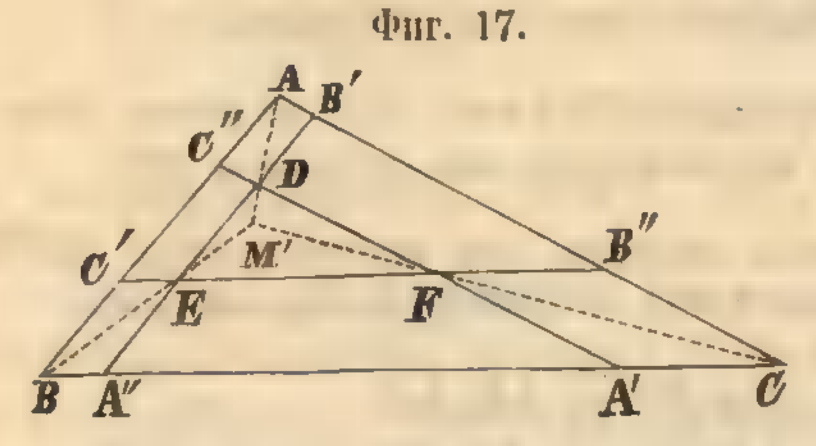
Фиг. 16.



Пусть M (фиг. 16) будетъ медіацентръ, M'—точка Лемуаня; A'C'', A''B'' и C'B'' параллели сторонамъ треугольника. Требуется доказать, что точки A', A'',....C'' лежатъ на одной окружности. Соединимъ точки C'' и B', тогда получимъ параллелограммъ AB'M'C'', въ которомъ B'C'' и AM' будутъ діагоналями, а слѣдовательно по теоремѣ 8, прямая B'C'' будетъ антипараллелью стороны BC, но B''C' параллельна по построенію BC, поэтому B'C'' будетъ антипараллельна прямой C'B'' и, значитъ, четыреугольникъ B'C''C'B'' будетъ вписываемый, слѣдовательно точки B', B'', C' и C'' будутъ лежать на одной окружности. Подобнымъ образомъ убѣдимся, что и точки C'', C', A'' и A'; B', B'', A' и A''; C'', B', A'', C' лежатъ, каждыя четыре, на одной окружности, а потому и всѣ *шесть точекъ* A', A'',....C'' лежатъ на одной окружности. Эта окружность называется *окружностью Лемуаня.*

2. *Если соединимъ точку Лемуаня съ вершинами даннаго треугольника и построимъ треугольникъ* DEF (фиг. 17) *подобный данному и затѣмъ продолжимъ стороны его до пересѣченія съ сторонами даннаго, то получимъ шесть точекъ* A', A'',....C'', *которыя лежатъ на одной окружности, называемой окружностью Токера.*

Фиг. 17.



Доказательство этого предложенія совершенно подобно предыдущему.

Очевидно, что окружность Лемуаня есть частный случай окружности Токера.

А. П. Грузинцевъ (Харьковъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Гальваническія батареи на Парижской выставкѣ 1889 г.

Г. Дьёдоннэ со 2-го № журнала La lumière électrique за 1890 г. начинаетъ обзоръ батарей, бывшихъ на прошлогодней парижской выставкѣ. Описаніе батарей авторъ предполагаетъ сдѣлать по слѣдующему плану:

1) Батареи съ солями хрома (съ двухромокаліевой, съ двухромонатріевой солью или же съ хромовой кислотой).
2) Батареи съ растворомъ нашатыря.
3) „ „ съ окисью мѣди или съ ея солями.
4) „ „ съ азотной кислотой.
5) „ „ съ разными реакціями.
6) Термоэлектрическія батареи.

Описаніе начинается съ батарей, въ которыхъ употребляютъ соли хрома. Во 2 № журнала описаны слѣдующія батареи: Шамруа (Chameroy), Саппей, Жоли, Кросса, Рено и Девернэ, Лагарда, Делорье, Радиге, Корнфельда, Мара, Ренара. Въ настоящей замѣткѣ передаю въ сокращенномъ видѣ содержаніе статьи Дьёдоннэ.

Батарея Шамруа. Наружными сосудами въ этой батареѣ служатъ угольные цилиндры, парафинированные снаружи. Къ верхней части цилиндра придѣлана (отливкой) свинцовая головка съ отверстіемъ для пропуска цинка. Къ головкѣ придѣлана клемма и воронка для вливанія раствора двухромовокаліевой соли. Дно у цилиндра также свинцовое съ короткой трубкой, на которую надѣвается резиновая трубка, а въ резиновую вставляютъ стеклянную съ загнутымъ внизъ верхнимъ концомъ. Такимъ образомъ наружный сосудъ (угольн. цилиндръ) и стеклянная трубка образуютъ 2 сообщающихся сосуда. При наклонѣ или опусканіи стеклянной трубки, очевидно, долженъ понизиться уровень жидкости и въ угольномъ цилиндрѣ; такимъ путемъ регулируется сила тока батареи. Цинки элементовъ выточены или отлиты въ формѣ винтовъ; они укрѣплены въ эбонитовыхъ крышкахъ, лежащихъ на свинцовыхъ головкахъ. Нижніе концы цинковъ опираются на изолирующія пластинки, во избѣжаніе замыканія тока на себя. Цилиндры (угольные) помѣщаются въ отверстіяхъ двухъ горизонтальныхъ досокъ; выше элементовъ находится резервуаръ съ растворомъ двухромовокаліевой соли; жидкость изъ этого резервуара разливается по элементамъ съ помощію трубки, идущей надъ угольными цилиндрами и имѣющей надъ каждой воронкой соотвѣтствующую короткую трубочку.— Жолобъ, или трубка, разливающая жидкость по элементамъ, вдѣлана въ дно резервуара и изогнута тамъ въ формѣ П, вслѣдствіе чего эта часть трубки дѣйствуетъ, какъ сифонъ, и стоитъ лишь наполнить резервуаръ до извѣстнаго уровня, чтобы жидкость начала разливаться по жолобу, а затѣмъ черезъ короткіе трубки желоба и по элементамъ. Искривленныя части стеклянныхъ трубокъ входятъ въ родъ корыта, на краяхъ котораго и висятъ. Ниже батареи помѣщается сосудъ для пріема отработавшей жидкости; для выпусканія ея надо вынуть стеклянныя трубки изъ жолоба, или корытца и опустить въ соотвѣтствующій сосудъ.

Батарея Саппей. Эта батарея изготовляется и эксплоатируется лондонской компаніей „Automatic electrical Corporation“. Основная идея изобрѣтателя заключается въ томъ, чтобы получить автоматическую смѣну жидкостей въ батареѣ. Для деполяризатора принято наибольшее время дѣйствія 3 часа, а для подкисленной воды—12 часовъ. Какъ діафрагмы, такъ и наружные сосуды сообщаются другъ съ другомъ съ помощію трубокъ въ днѣ. Выливаніе и вливаніе жидкостей выполняется слѣдующимъ образомъ: одна изъ стрѣлокъ часового механизма замыкаетъ токъ черезъ электромагниты, впускающіе и выпускающіе деполяризующую жидкость; другая стрѣлка дѣлаетъ тоже самое относительно подкисленной воды. Работа электромагнитовъ заключается въ томъ, что они открываютъ два клапана: одинъ вливающій свѣжую жидкость и другой, выливающій отработавшую. Батарея служитъ не для непосредственнаго пользованія ею, а для заряженія аккумуляторовъ. Электромагниты возбуждаются отвѣтвленіемъ главнаго тока. Наружные сосуды элементовъ изъ эбонита; въ нихъ стоятъ цилиндрическія діафрагмы съ трубками въ днѣ. Свѣжая жидкость, быстро втекающая въ элементы, дѣйствуетъ въ концѣ наполненія на рычагъ, размыкающій цѣпь отвѣтвленія электромагнитовъ, вслѣдствіе чего клапаны вновь закрываются на 3 часа для деполяризатора и на 12 для подкисленной воды. Батарея изъ 12 элементовъ оцѣнивается конструкторами въ 500 фр. По опытамъ Приса выходитъ, что 1000 уаттовъ отъ этой батареи обойдутся въ 2,5 фр. Лондонская компанія не продаетъ своихъ элементовъ: она производитъ установки съ аккумуляторами, причемъ за освѣщеніе беретъ по 10 сантимовъ въ часъ за горѣніе 10 свѣчной лампы. Повѣрку расходованія жидкостей компанія производитъ при помощи замыкающихъ токъ часовъ. По слухамъ компанія особымъ способомъ амальгамируетъ цинки (электрохимическимъ путемъ). Черезъ нѣсколько мѣсяцевъ дѣйствія батареи вся затраченная ртуть собирается на днѣ сосудовъ.

Батарея Жоли. Батарея угле-цинковая съ одной жидкостью. Цинковыя и угольныя пластинки (по одной цинковой между 2 угольными) имѣютъ форму вѣеровъ съ двумя прямоугольными сторонами. Кривые срѣзы электродовъ приходятся во время дѣйствія батареи противъ передней стѣнки ящика, въ которомъ помѣщаются наружные сосуды элементовъ. Электроды верхними частями прикрѣплены къ брускамъ, а бруски къ прямоугольной рамѣ, поворачивающейся около одной изъ длинныхъ сторонъ, на манеръ крышки на шарнирахъ. Рама съ помощію 2-хъ боковыхъ задержекъ можетъ быть поставлена подъ любымъ угломъ къ элементамъ для большаго или меньшаго опусканія электродовъ въ жидкость. Электроды прикрѣплены къ рамѣ изолирующими завертками вслѣдствіи чего цинки легко перемѣнять. Выдающіеся съ одной стороны ящика концы брусковъ имѣютъ на себѣ клеммы. Батарея снабжена круглымъ коммутаторомъ для послѣдовательнаго или параллельнаго введенія элементовъ. *П. П.*

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Второе предварительное собраніе Кіевскаго Физ.-Мат. Общества состоялось 17-го февраля въ одной изъ аудиторій университета. Присутствовало 37 дѣйствительныхъ членовъ. Закрытой баллотировкой были избраны въ составъ Распорядительнаго Комитета слѣдующія лица: Предсѣдателемъ (на 2 года)—проф. Н. Н. Шиллеръ, товарищами предсѣдателя (на 1 годъ)—проф. В. П. Ермаковъ и Э. К. Шпачинскій, секретаремъ (на 1 годъ)—доц. Б. Я. Букрѣевъ и казначеемъ (на 1 годъ)—К. Н. Жукъ.

Рѣшено на будущее время собираться въ новомъ помѣщеніи физическаго кабинета. Къ 1-му очередному засѣданію, назначенному на 22 февраля (въ четвергъ въ $6^1/_2$ ч. вечера) заявлены сообщенія: 1) К. Н. Жука—„о результатахъ новѣйшихъ полярныхъ экспедицій" и 2) Н. Н. Шиллера—„объ изложеніи понятія о центробѣжной силѣ въ общепринятыхъ учебникахъ физики".

Распорядительный комитетъ VIII съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей проситъ насъ напечатать слѣдующее:

„Распорядительный комитетъ Высочайше разрѣшеннаго VIII-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей, исполняя рѣшеніе общаго собранія, опредѣлилъ:

1) Издать отчетъ о научныхъ трудахъ съѣзда.

2) Каждый членъ съѣзда имѣетъ право на полученіе одного экземпляра этого изданія.

3) Такъ какъ средства, могущія быть ассигнованными на изданіе трудовъ, вполнѣ опредѣленны и ограничены, число-же научныхъ сообщеній, сдѣланныхъ на секціонныхъ засѣданіяхъ, весьма велико и нѣкоторыя изъ нихъ обширны, то редакціи трудовъ VIII съѣзда поручается озаботиться о томъ, чтобы предполагаемое изданіе, выражая съ возможною полнотою научные интересы съѣзда, было соображено по своимъ размѣрамъ съ имѣющимися для напечатанія трудовъ средствами.

4) Общая редакція трудовъ VIII съѣзда ввѣряется члену распорядительнаго комитета, профессору Д. И. Менделѣеву, редакція спеціальныхъ статей—членамъ комитета, завѣдывавшимъ секціями, а отчетъ о дѣятельности распорядительнаго комитета, объ общихъ и большихъ соединенныхъ собраніяхъ—секретарю съѣзда, профессору В. В. Докучаеву.

5) Рукописи статей, сообщенныхъ на съѣздѣ, но еще недоставленныхъ авторами, должны быть присланы не позже 1-го марта 1890 г., по адресу: С.-Петербургъ, университетъ, проф. Д. И. Менделѣеву.

6) Всѣхъ членовъ съѣзда покорнѣйше просятъ доставить точныя данныя объ ихъ имени, фамиліи, званіи, адресѣ и т. п., для составленія полнаго списка членовъ, по слѣдующему адресу: С.-Петербургъ, университетъ, минералогическій кабинетъ, профессору В. В. Докучаеву".

Предсѣдатель VIII съѣзда и распорядительнаго комитета *А. Бекетовъ.*
Секретарь Съѣзда и дѣлопроизводитель Распорядительнаго Комитета
В. Докучаевъ.

Электрическій глазъ. Нельзя поручиться, что и русскія газеты не заговорятъ вскорѣ объ „удивительномъ" изобрѣтеніи проживающаго, кажется, въ г. Динабургѣ врача Ноишевскаго, выдумавшаго „глазъ для слѣпыхъ". Въ виду возможности различныхъ на эту тему фантазій и ликованій, постараюсь разъяснить читателямъ сущность идеи „электрическаго глаза", на основаніи тѣхъ, недостаточно впрочемъ опредѣленныхъ сообщеній, которыя помѣщены объ изобрѣтеніи г. Ноишевскаго въ жур-

налѣ „Wszechświat“ (№ 6, 1890 г.), заимствовавшемъ ихъ изъ одного медицинскаго журнала.—Извѣстно, что селенъ мѣняетъ свою электропроводность подъ вліяніемъ лучей свѣта. Пользуясь этимъ, г. Ноишевскій *предлагаетъ устроить* *) такой приборчикъ изъ селена и золотыхъ проволочекъ, въ которомъ токъ, проходя сквозь наиболѣе освѣщенныя части селеновой пластинки, нагрѣвалъ-бы соотвѣтствующія этимъ частямъ проволочки. Концы (?) этихъ проволочекъ, приложенные въ видѣ щеточки ко лбу слѣпого, очертятъ на кожѣ тепловой, такъ сказать, контуръ или силуэтъ того предмета, свѣтовое изображеніе котораго (при помощи линзъ) можетъ быть получено на селеновой пластинкѣ, и такимъ образомъ —по мнѣнію автора— слѣпой можетъ составить себѣ понятіе о невидимомъ предметѣ, черезъ посредство тепловыхъ ощущеній.—Все это крайне фантастично, и наврядъ-ли когда либо кто нибудь изъ несчастныхъ, лишенныхъ на всегда радостей свѣта, будетъ пользоваться „глазомъ“ г. Ноишевскаго для распознаванія внѣшнихъ предметовъ.—Наше недовѣріе къ практическому примѣненію „электрофтальма“ г. Ноишевскаго основывается на томъ, что если съ одной стороны мы не можемъ отрицать въ принципѣ возможности такого, такъ сказать, „лучетрансформатора“, въ которомъ видимые лучи свѣта переходили бы въ тепловыя колебанія, способныя вызывать въ насъ количественно различныя тепловыя ощущенія, то съ другой—мы рѣшительно сомнѣваемся въ дальнѣйшемъ преобразованіи такихъ ощущеній, вызванныхъ на извѣстномъ кускѣ нашей кожи, въ опредѣленное сознаніе контура раздраженія и его интенсивности. Наврядъ ли мы вправѣ предполагать такую аналогію между чувствительностью кожи, хотя бы и на лбу выше носа, куда г. Ноишевскій предлагаетъ приставлять свою щеточку **), и чувствительностью сѣтчатой оболочки глаза; нельзя забывать, что въ физіологическомъ актѣ воспріятія какихъ бы то ни было внѣшнихъ впечатлѣній существенную роль играетъ болѣе или менѣе быстрая „перемѣна мѣста раздраженія“: продолжительность и непрерывность раздраженія, направленнаго на одни и тѣ-же нервы, быстро притупляетъ ихъ впечатлительность и вводитъ органы нашихъ чувствъ въ обманъ. Поэтому скорѣе уже можно было-бы согласиться съ тѣмъ, что не приставляя такую щеточку къ одному мѣсту, а напротивъ обводя различныя ея части напримѣръ пальцами, ощупывая ее по всей ея поверхности, человѣкъ лишенный зрѣнія могъ бы еще составить себѣ кое какое представленіе о тепловомъ силуэтѣ, вызванномъ освѣщеннымъ предметомъ.—Что же касается самаго прибора г. Ноишевскаго, то повторяемъ—для насъ не ясенъ его принципъ и мы предпочитаемъ— пока авторъ не дастъ болѣе опредѣленныхъ указаній—считать его попросту однимъ изъ проявленій прожектерства.

—◆ **Геометрическія тетради** (изданіе А. Г. Сыркина, въ Вильнѣ, 1890 г.) Цѣна отдѣльной тетради 15 коп.

№ 1-ый такой тетради (въ 36 стр.) присланъ въ нашу редакцію, на дняхъ съ отмѣткою: „для благосклоннаго вниманія и отзыва“.

Начало занято предисловіемъ г. *А. А. Ильина* ***) озаглавленнымъ: „Цѣль

*) Мы говоримъ „предлагаетъ устроить“ такъ какъ нигдѣ не нашли указаній относительно того, что авторъ „дѣйствительно устроилъ“ такой приборъ. Наконецъ для насъ сомнительна и сама возможность существованія такого прибора.

**) Кстати сказать, устройства этой золотой щеточки мы не понимаемъ; какъ вызывается токомъ нагрѣваніе концовъ проволочекъ, проходитъ ли токъ и черезъ кожу, къ которой щеточка приложена, или нѣтъ – изъ статьи г. С. К въ вышеназванномъ журналѣ мы догадаться не могли.

***) Не того-ли самаго Аркадія Александровича Ильина, который издалъ 1 вып. „Справочной книжки по Общей Физикѣ“, который обѣщалъ издавать подъ такимъ же заглавіемъ журналъ на трехъ языкахъ, и кромѣ того „Ежегодникъ“, который обѣщалъ устроить какое то общество изготовленія физ. приборовъ, и пр. пр?

изданія геометрическихъ тетрадей“. Вотъ она, по словамъ автора: „На сколько „было бы странно требовать отъ математика отчетливаго, точнаго чертежа для „доказательства той или другой теоремы, что можно сравнить съ требованіемъ отъ „поэта каллиграфическаго почерка, настолько-же это требованіе не только умѣстно, „но и необходимо въ нормальномъ курсѣ средняго образованія.—Хорошо и точно „исполненный чертежъ вызываетъ такое-же отчетливое представленіе теоремы или „предложенной задачи, пріучаетъ къ аккуратности при выполненіи каждой работы— „что составляетъ одну изъ главныхъ учебно-вспомогательныхъ задачъ школы, кото- „рую не долженъ игнорировать и учитель математики. Между тѣмъ въ учебные „планы гимназій ни черченія, ни даже рисованія (?), какъ обязательныхъ предметовъ, „не введено; учитель геометріи удѣлить отдѣльнаго времени для достиженія нѣко- „тораго навыка въ черченіи не можетъ, а потому не можетъ и требовать отъ уча- „щихся сколько нибудь чистаго чертежа“ (?).

Не остается ничего болѣе, какъ заставить ученика купить за 15 коп. „Гео- метрическую тетрадь“ А. А. Ильина, цѣлью изданія которой служитъ:

„а) Облегчить первоначальное черченіе тѣмъ, что ученику предлагается только „обвести пунктированныя линіи или исполнить чертежъ самостоятельно, но по дан- „ному тутъ-же образцу его.

„б) Облегчить преподавателю контроль надъ классными и домашними занятіями „учениковъ введеніемъ однообразія въ тетрадяхъ, въ которыхъ каждая теорема „или задача помѣщается на опредѣленномъ мѣстѣ (!), и потому каждый пробѣлъ въ „нихъ ясно можетъ быть замѣченъ (??)“.

Чтобы достичь первой цѣли, въ „тетради“ помѣщено около 60 отвратительно исполненныхъ (типографскимъ способомъ), однообразныхъ и ошибочныхъ черте- жей, не имѣющихъ ничего общаго съ „геометрическимъ черченіемъ“. № 1 тетради предназначенъ для учениковъ 4-го класса; но во всей Россіи нѣтъ, вѣроятно, ни одного четвертоклассника, который, имѣя даже первый разъ въ рукахъ циркуль, линейку и карандашъ, вычертилъ бы знакомые уже ему чертежи такъ грубо и не- правильно, какъ тѣ, которые предлагаются г. А. А. Ильинымъ какъ образцы. По неволѣ приходится задаться вопросомъ: Что-же это такое – насмѣшка, или..........по просту афферизмъ?

Вся тетрадь наполнена (безграмотно) теоремами, съ оставленнымъ для ихъ доказательства мѣстомъ, вопросами, на которые ученикъ долженъ вписывать отвѣты (это—контроль!), и задачами, съ заданными по чертежу данными. И въ этомъ отношеніи небрежность составителя (или издателя) превосходитъ всякое вѣ- роятіе. Напр. *Теорема* 5 (стр. 25) гласитъ: „Если два угла одного треугольника соотвѣт- „ственно равны двумъ угламъ другого, но углы заключенные между этими сторонами „не равны, то противъ большаго угла лежитъ большая сторона.“ Чертежъ (№ 41), приложенный къ этой безсмыслицѣ, заключаетъ два треугольника, одинъ равнобе- дренный, другой равносторонній. А вотъ и примѣръ задачи: (№ 18, стр. 22). „По- строить прямоугольникъ по даннымъ сторонамъ“, (которыхъ, какъ видно изъ при- ложеннаго чертежа № 30, должно быть три). Не говорю уже о томъ, что чуть ли не на каждой страницѣ чертежи не соотвѣтствуютъ тексту (напр. черт. 33, 45, 54 и пр.).

И послѣ всего этого г. издатель „Геометрическихъ тетрадей“ еще вообра- жаетъ, что могутъ найтись охотники „перепечатывать“ его лубочную затѣю, какъ это видно изъ угрожающей фразы на 1-ой стр.: „Перепечатаніе будетъ преслѣдо- ваться закономъ!“ Не лучше ли было вмѣсто этого вспомнить, что если и нѣтъ

особаго закона, то есть нравственная обязанность не распространять путемъ печати невѣжества среди учащихся и—поискать для своей предпріимчивости какихъ либо другихъ сферъ. *Ш.*

ЗАДАЧИ.

№ 8. Найти общій видъ такихъ трезначныхъ чиселъ, коихъ число сотенъ есть среднее ариѳметическое чиселъ десятковъ и единицъ, опредѣлить сколько можетъ быть такихъ чиселъ и найти ихъ общаго дѣлителя. *А. Шифринъ* (Кіевъ).

№ 9. Дана окружность діаметра AB. Изъ нѣкоторой точки діаметра C, тѣмъ-же радіусомъ ($=\frac{1}{2}$AB), зачеркнута дуга, пересѣкающая окружность въ D. Черезъ D и C проведена хорда DE, длина которой оказалась $=\frac{7}{8}$AB. Спрашивается: 1) въ какомъ отношеніи дѣлится діаметръ AB точкою C и 2) что изображаетъ собою отрѣзокъ CE? *Ш.*

№ 10. Рѣшить систему:

$$x^3-xyz=a\sqrt{x^3+y^3+z^3}$$
$$y^3-xyz=b\sqrt{x^3+y^3+z^3}$$
$$z^3-xyz=c\sqrt{x^3+y^3+z^3}$$

А. Гольденбергъ (Спб.)

№ 11. Въ кругъ O вписанъ косоугольный треугольникъ ABC; черезъ его вершины проведены діаметры AD, BE, CF; точки D, E, F соединены съ ближайшими къ нимъ вершинами треугольника. Доказать, что площадь полученнаго такимъ образомъ вписаннаго шестиугольника вдвое больше площади треугольника ABC. *С. Блажко* (Москва).

NB. Справедливо ли это для случая, когда центръ O описанной окружности лежитъ внѣ треугольника?

№ 12. Внутри круга O на неподвижномъ діаметрѣ даны двѣ точки A и B (расположенныя по одну сторону отъ центра O или по разныя). Соединяя точки A и B съ концами другого подвижнаго діаметра CD, получимъ различные четыреугольники Требуется найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія противоположныхъ сторонъ этихъ четыреугольниковъ. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 13. Внутри треугольника ABC возьмемъ такую точку M чтобы:

$$\angle BMC=\frac{2}{3}d+A;\quad \angle CMA=\frac{2}{3}d+B;\quad \angle AMB=\frac{2}{3}d+C$$

и опустимъ изъ нея перпендикуляры MA′, MB′, MC′ соотвѣтственно на стороны BC, CA и AB. Требуется доказать, что треугольникъ A′B′C′ будетъ равносторонній. *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 361 *). Доказать, что

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}=2.$$

Доказывается возвышеніемъ въ квадратъ.

Н. Карповъ (Лубны), *З. А.* (Новозыб.), *М. Долговъ* (Ворон.), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). *М. Сухановъ* (Ст. Усть-Медв.). Ученики: Кіевск. 1-ой г. (8) *В. Б.*, Кіевск. 2-ой г. (8) *В. М*, Кам-Под. г. (6) *Я. М.* и (7) *А. Р.*, Екатрсл. г. (6) *А. С.*, Новоз. р уч. (7) *М. Н.*, Короч. г. (8) *Н. Б.*, Ворон. к. к. (6) *К. А.* и *Н. В.*, Курск. г (7) *В. Г.*, (6) *В. Х.*, Урюп. р. уч. (6) *П. У—ъ*, 1-й Спб. г. (8) *А. К*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Кіев. р. уч. (6) *А. Ш.*, Спб. ц. Ек. уч. (7) *В. М.*

№ 486. Въ кругъ радіуса R вписанъ четыреугольникъ ABCD, въ которомъ AB=BC=a и діагональ BD=d. Вычислить его площадь.

Изъ точки B опустимъ первпендикуляры BM и BN на стороны DC и AD. Тогда BM=BN, такъ какъ діагональ DB есть биссекторъ угла ADC. Опредѣлимъ теперь высоту BM △-ка DBC. Извѣстно, что высота △-ка равна произведенію сторонъ (изъ точки пересѣченія которыхъ она выходитъ) раздѣленному на діаметръ круга описаннаго. Слѣдовательно

$$BM=\frac{BD\ BC}{2R}=\frac{ad}{2R}.$$

Теперь опредѣлимъ

$$DM=\frac{d\sqrt{4R^2-a^2}}{2R},\quad MC=\frac{a\sqrt{4R^2-d^2}}{2R};$$

такимъ образомъ

$$DC=\frac{d\sqrt{4R^2-a^2}+a\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}.$$

Точно также найдемъ, что

$$AD=\frac{d\sqrt{4R^2-a^2}-a\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}.$$

Сложивъ площади △-ковъ BDC и ADB, въ которыхъ основанія и высоты извѣстны, получимъ искомую площадь

$$ABCD=\frac{ad^2\sqrt{4R^2-a^2}}{4R^2}.$$

А. Яницкій (Кіевъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *П. Трипольскій* (Полт.), *И. Пастуховъ* (Пермь), *Н. Карповъ* (Лубны), *Н. Артемьевъ* (Спб.). Ученики: Короч. г. (8) *И. С.*, Крем. р. уч. (6) *І. Т.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В.*, Твер. р. уч. (7) *М. Н.*, Курск. г. (7) *И. П.*, (8) *А. П.* и *С. Г.*, Черн. г. (8) *Д. З.*, Симб. г. (7) *П. Б.*, Т. Х. Ш. р. уч. (7) *А. Б.*

---

*) При помѣщеніи въ № 53 этой задачи, по невнимательности корректора, было пропущено слово „тригонометрически", почему задача и оказалась ужъ слишкомъ дѣтской. Тригонометрическое доказательство основано на слѣдующей зависимости:

$$2+\sqrt{2}=2(1+\mathrm{Cos}\ 45^\circ)=2^2.\mathrm{Cos}^2\frac{45^0}{2}.$$

Извлекая кв. корень, прибавляя по 2, и повторяя это неопредѣленное число разъ, получаемъ:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}=2.\mathrm{Cos}\frac{45}{2^n},$$ что при $n=\infty$ равно 2.

№ 489. Опредѣлить поверхность фигуры, происшедшей отъ вращенія круга около оси, лежащей внѣ круга, въ одной плоскости съ послѣднимъ.

Положимъ, что радіусъ круга $=R$, а разстояніе центра отъ оси вращенія $=h$. Проведемъ діаметръ параллельный оси вращенія и впишемъ въ кругъ правильный многоугольникъ четнаго числа сторонъ. Пользуясь такими же разсужденіями какъ и при опредѣленіи поверхности шара, найдемъ, что S поверхность, которую опишетъ полукругъ, обращенный выпуклостью въ сторону противоположную оси вращенія, будетъ равна

$$S=2\pi^2Rh+4\pi R^2.$$

Другой полукругъ опишетъ поверхность S' равную

$$S'=2\pi^2Rh-4\pi R^2.$$

Сложивъ эти поверхности, найдемъ, что s искомая поверхность, называемая поверхностью *тора*, будетъ

$$s=4\pi^2Rh.$$

Н. Николаевъ (Пенза), *В. Ивановъ* (Златополь), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Кричевскій* (Ромны). Ученики: Кам.-Под. г. (7) *К. К.*, Могил. г. (8) *Я. Э.*, 1-ой Кіевск. г. (8) *А. Шлж.*

№ 490. Рѣшить систему

$$(x+y)(xy+1)=mxy$$
$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=nx^2y^2.$$

Раздѣлимъ обѣ части перваго уравненія на xy, а второго на x^2y^2 и раскроемъ скобки, тогда получимъ

$$x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=m$$

$$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]+\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2\right]=n,$$

или

$$u+v=m$$
$$u^2+v^2=n+4,$$

гдѣ

$$u=x+\frac{1}{x},\ v=y+\frac{1}{y}.$$

Дальнѣйшій ходъ рѣшенія очевиденъ.

Н. Николаевъ (Пенза), *В. Ивановъ* (Златополь), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ). *С. Кричевскій* (Ромны). Ученики: Вор. к. к. (7) *Н. В.*, Курск. г. (7) *В. Х.*, 2-й Тифл. г. (7) *М. А.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 26 Февраля 1890 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.